



TITLE:

# ON ALGEBRAIC $K$ -THEORY, HOMOLOGY SPHERES AND THE $\eta$ -INVARIANT (Volume Conjecture and Its Related Topics)

AUTHOR(S):

森藤, 孝之

---

CITATION:

森藤, 孝之. ON ALGEBRAIC  $K$ -THEORY, HOMOLOGY SPHERES AND THE  $\eta$ -INVARIANT (Volume Conjecture and Its Related Topics). 数理解析研究所講究録 2002, 1279: 8-25

ISSUE DATE:

2002-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/42347>

RIGHT:

# ON ALGEBRAIC $K$ -THEORY, HOMOLOGY SPHERES AND THE $\eta$ -INVARIANT

東京農工大・工 森藤孝之 (Takayuki Morifuji)  
Tokyo Univ. of Agriculture and Technology

はじめに

本稿は J.D.S.Jones と B.W.Westbury による論文 [15] の (ごく一部の) 紹介です. 大雑把に言うと, ホモロジー  $n$  球面とその基本群の表現から定まる代数的  $K$  群の元に対して, secondary Chern character  $e$  の計算を実行することが主な目標です. その際 Atiyah-Patodi-Singer の  $\eta$ -不変量を用いることになります. より具体的には, 双曲構造もしくはザイフェルト構造を許容するホモロジー 3 球面から定まる  $K_3(\mathbb{C})$  の元の性質を詳しく考察することがここでの目標となります.

## 1. Adams $e$ -不変量

$R$  を単位元をもつ任意の環とします. ホモロジー  $n$  球面  $\Sigma$  の基本群の表現  $\alpha: \pi_1 \Sigma \rightarrow GL_N(R)$  が与えられているとします.  $f: \Sigma \rightarrow BGL_N(R)$  を  $\alpha$  を誘導する連続写像とすると, これを包含写像  $BGL_N(R) \rightarrow BGL(R)$  と合成し (ここで,  $GL(R) = \varinjlim GL_N(R)$ ), かつ Quillen のプラス構成 (後述) を適用することにより, 連続写像

$$S^n \simeq \Sigma^+ \rightarrow BGL^+(R)$$

が得られることになります ( $\Sigma$  がホモロジー球面 ( $H_*(\Sigma) \cong H_*(S^n)$ ) であることが本質的). これは  $K$  理論における元

$$[\Sigma, \alpha] \in K_n(R) = \pi_n BGL^+(R)$$

を与えることになります.

さて, Connes と Karoubi [11] により, secondary Chern character

$$e: K_{2n+1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

が定義されました. この準同型写像に  $e$  を用いる理由は, つぎの図式が可換という意味において, これが Adams  $e$ -不変量を拡張するからです:

$$\begin{array}{ccc} \pi_{2n+1}^s & \xrightarrow{e} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{2n+1}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{e} & \mathbb{C}/\mathbb{Z} \end{array}$$

ただし  $\pi_n^s = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{n+k}(S^k)$  は球面の安定ホモトピー群, 写像  $\downarrow$  は自然な準同型を表します.

ここで Adams  $e$ -不変量の復習を簡単におきます (secondary Chern character の定義については後述).  $X$  を  $n$  次元枠付多様体 (法束の自明化をもつ多様体) とします. Pontrjagin-Thom 構成により, 球面の安定ホモトピー群は枠付多様体のコボルディズム群と同一視できることに注意します [22]. 特に,  $n$  次元多様体  $X$  上の平行化 (接束の自明化)  $\pi$  は  $X$  上のフレーミング (安定法束の自明化, つまり up to homotopy で安定接束の自明化) を誘導します. ゆえに, 安定ホモトピー群の元  $[X, \pi] \in \pi_n^s$  が定まることになります.

$n = 4k - 1$  に対する Adams  $e$ -不変量は次のように計算される準同型

$$e : \pi_{4k-1}^s \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

のことです (以下の記述は Conner-Floyd による).  $4k - 1$  次元スピンコボルディズム群が自明なことから [22],  $X$  を境界としてもち,  $X$  上に誘導されるスピン構造が  $\pi$  から定義された自明なスピン構造と一致するような  $4k$  次元スピン多様体  $Y$  が存在することになります. また,  $Y$  の接束の  $X$  上での自明化  $\pi$  が与えられていることから, Pontrjagin 類  $p_j$  を  $H^*(Y, X)$  での相対類として定義できることになります.  $\hat{A}(Y)$  で  $Y$  の  $\hat{A}$ -種数 (Hirzebruch の  $\hat{A}$ -多項式 ( $p_j$  の多項式) を  $Y$  の基本類上で値をとったもの) を表すことにすると, Adams 不変量は

$$e[X, \pi] = \begin{cases} \hat{A}(Y) \mod \mathbb{Z} & (k:\text{even}) \\ \frac{1}{2}\hat{A}(Y) \mod \mathbb{Z} & (k:\text{odd}) \end{cases}$$

で与えられます. 一般に  $\hat{A}(Y)$  は有理数に値をもちますが, 閉スピン多様体の  $\hat{A}$ -種数に関する整数性定理 [2] (特に,  $\dim Y \equiv 4 \pmod{8}$  ならば  $\hat{A}(Y)$  は 2 でわれる) から,  $e[X, \pi]$  は  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  の元として well-defined である ( $Y$  の選び方には依らない) ことがわかります.

そこで次を問うのは自然であると思われます. つまり, Adams  $e$ -不変量を  $X$  だけを用いて計算する方法は存在するか. この問に対する一つの答えが Atiyah-Patodi-Singer [4] において与えられています. 実際それはスペクトル不変量 ( $\eta$ -不変量) を用いて記述されます ([4] 定理 4.14).

以上の結果を雛形として,  $K$  理論における secondary Chern character

$$e : K_{2n+1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

がどのようにして  $\eta$ -不変量を用いて計算されるかを次節以降で見ることにします.

## 2. Secondary Chern character

より一般に, secondary Chern character  $e : K_{2n+1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  は自然な準同型写像

$$e : K_{\text{alg}}^0(X, \mathbb{C}) \rightarrow K^1(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$$

に拡張されます. ここで定義から

$$K_{\text{alg}}^0(X, \mathbb{C}) = [X, \mathbb{Z} \times BGL^+(\mathbb{C}^\delta)]$$

となります. ただし  $BGL^+(\mathbb{C}^\delta)$  は, 離散位相を与えた  $\mathbb{C}$  の一般線型群の分類空間に Quillen のプラス構成を適用して得られる空間を表します. また  $K^\bullet(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$  は可換群  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  を係数にもつ通常の位相的複素  $K$  理論を表します. コホモロジー理論  $K^\bullet(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$  は代数的位相幾何学の一般的手法により定義されますが, 我々の目的のために, 以下では  $K^1(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$  のより具体的な記述を与えることにします.

さて, Karoubi [16] に従って, 準同型写像  $e$  の構成を記述します. このために, 群  $K_{\text{alg}}^0(X, \mathbb{C})$  および  $K^1(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$  を定義する明確な方法が必要になります. まず  $K_{\text{alg}}^0(X, \mathbb{C})$  についてですが, より一般に単位元をもつ任意の環  $R$  に対して

$$K_{\text{alg}}^0(X, R) = [X, K_0(R) \times BGL^+(R)]$$

を考えることにします. 次に

$$\text{Rep}(\pi_1 X, GL(R))$$

によって, 表現  $\pi_1 X \rightarrow GL(R)$  の同型類たちからなるモノイドを表すことにします.  $GL(R) = \varinjlim GL_n(R)$  より  $\text{Rep}(\pi_1 X, GL(R))$  の各元は, ある  $n$  に対す

る表現  $\pi_1 X \rightarrow GL_n(R)$  によって決まることになります. また, ある  $N > n, m$  に対して, 二つの表現  $\pi_1 X \rightarrow GL_n(R)$  と  $\pi_1 X \rightarrow GL_m(R)$  が  $GL_N(R)$  において同値ならば,  $n$  および  $m$  次元表現は  $\text{Rep}(\pi_1 X, GL(R))$  で同じ元を定めることになります.  $\text{Rep}(\pi_1 X, GL(R))$  のモノイド構造は表現の直和により定義されます.

表現  $\pi_1 X \rightarrow GL(R)$  は写像  $X \rightarrow BGL(R)$  を与え, これと連続写像  $BGL(R) \rightarrow BGL^+(R)$  を合成することにより, モノイドの自然な準同型

$$\text{Rep}(\pi_1 X, GL(R)) \rightarrow K_{\text{alg}}^0(X, R)$$

が得られます. この準同型は次の意味での普遍性をもちます. 有限  $CW$  複体  $X$  の圏上定義された表現可能な群値ホモトピー関手を  $F(X)$  とし,

$$\Phi : \text{Rep}(\pi_1 X, GL(R)) \rightarrow F(X)$$

をモノイド値関手の自然変換とするとき, 以下の図式を可換にするような群値関手の自然変換

$$\tilde{\Phi} : K_{\text{alg}}^0(X, R) \rightarrow F(X)$$

が唯一つ存在する:

$$\begin{array}{ccc} \text{Rep}(\pi_1 X, GL(R)) & \xrightarrow{\Phi} & F(X) \\ \downarrow & & \downarrow = \\ K_{\text{alg}}^0(X, R) & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & F(X) \end{array}$$

この普遍性は, 関手  $\text{Rep}(\pi_1 X, GL(R))$  が関手  $K_{\text{alg}}^0(X, R)$  を生成する明確な方法を表していることになります.

$K_{\text{alg}}^0(X, R)$  を記述するもう少し具体的な方法も存在します ([16] 第3章). 簡約化された  $K$  理論  $[X, BGL^+(R)]$  の元は, ホモロジー同値  $Y \rightarrow X$  とある  $n$  に対する表現  $\rho : \pi_1 Y \rightarrow GL_n(R)$  によって与えられます. このような二つの対  $(Y_1, \rho_1)$  と  $(Y_2, \rho_2)$  が  $[X, BGL^+(R)]$  の同じ元を与えるのは, 次の二つの条件をみたすときです:

(i) (up to homotopy で) 可換となるホモロジー同値の図式

$$\begin{array}{ccc} Z & \longleftarrow & Y_1 \\ \uparrow & \searrow & \downarrow \\ Y_2 & \longrightarrow & X \end{array}$$

が存在する.

- (ii)  $i = 1, 2$  に対して, 表現  $\pi_1 Y_i \rightarrow \pi_1 Z \xrightarrow{\rho_Z} GL_N(R)$  が表現  $\rho_i$  に安定的に同値となるような表現  $\rho_Z : \pi_1 Z \rightarrow GL_N(R)$  が存在する.

次に,  $K^1(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$  の幾何的構成を与えることにします (これは本質的には Banach 代数  $\mathbb{C}$  に対する Karoubi の乗法的  $K$  理論 [16],[17] です). まず, コホモロジー理論  $K^*(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$  の基本的な性質として, 次の完全系列が成り立っていました:

$$\cdots \rightarrow K^i(X) \rightarrow K^i(X)_{\mathbb{C}} \rightarrow K^i(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \rightarrow K^{i-1}(X) \rightarrow K^{i-1}(X)_{\mathbb{C}} \rightarrow \cdots$$

ところで, Chern 指標は自然な同型

$$ch : K^*(X)_{\mathbb{C}} \rightarrow H^*(X, \mathbb{C})$$

を与えます (ここで,  $H^*(X, \mathbb{C})$  は偶奇の次数により  $\mathbb{Z}/2$ -graded となります). よってホモトピー論における言葉づかいでは,  $K^1(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$  は次のように定義されます.  $\mathfrak{F}(ch)$  により, Chern 指標を写像

$$ch : \mathbb{Z} \times BGL(\mathbb{C}) \rightarrow \prod_{n \geq 0} K(\mathbb{C}, 2n)$$

と見なしたときのホモトピーファイバーを表すことにします ( $K(\mathbb{C}, 2n)$  は Eilenberg-McLane 空間). このとき

$$K^1(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} = [X, \mathfrak{F}(ch)]$$

となります. 特に関手  $K^1(-)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$  は表現可能となります.

さて, 以下では  $X$  は滑らかなコンパクト多様体 (境界をもっても良い) であると仮定します. そこで接続  $\nabla_E, \nabla_F$  が与えられた  $X$  上の複素ベクトル束  $E, F$  および  $X$  上の奇数次の微分型式  $\omega$  からなる三つ組み

$$\mathcal{E} = ((E, \nabla_E), (F, \nabla_F), \omega)$$

を考えることにします. ただし,  $\omega$  は

$$d\omega = ch(\nabla_E) - ch(\nabla_F)$$

をみたすとします. ここで任意の接続  $\nabla$  に対して,  $\nabla$  の曲率を  $F(\nabla)$  とすると

$$ch(\nabla) = \text{tr} \left( e^{\sqrt{-1}F(\nabla)/2\pi} \right)$$

が成り立ちます。したがって、 $ch(\nabla_E)$  と  $ch(\nabla_F)$  は  $E$  と  $F$  の Chern 指標に対する Chern-Weil 代表元となります。このような二つの三つ組み  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  は  $\omega' = \omega + d\varphi$  となるときの同一視することにします。また、これらの三つ組みには自然な和

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' = ((E \oplus E', \nabla_E \oplus \nabla_{E'}), (F \oplus F', \nabla_F \oplus \nabla_{F'}), \omega + \omega')$$

があります。この演算は可換かつ結合的であり、 $E = F$  が自明な 0 次元ベクトル束かつ  $\omega = 0$  となる三つ組みによって与えられる零元が存在します。

次に、これらの三つ組みのあいだに同値関係  $\sim$  を定義します。まず初めに、 $\mathcal{E}$  が零元 0 に同値であるということを定義します。 $V$  を接続  $\nabla_V$  が与えられた  $X \times I$  上のベクトル束とします。 $\nabla_V$  に関する Chern-Simons 構成から

$$dTch(\nabla_V) = ch(\nabla_{V_1}) - ch(\nabla_{V_0}) \quad (V_t = i_t^*(V), \nabla_{V_t} = i_t^*(\nabla_V))$$

をみたすような  $X$  上の微分型式  $Tch(\nabla_V)$  が得られることになります。このとき、もし接続  $\nabla_V$  をもつ  $X \times I$  上のベクトル束  $V$  で

$$(E, \nabla_E) = (V_0, \nabla_{V_0}), \quad (F, \nabla_F) = (V_1, \nabla_{V_1}), \quad \omega = Tch(\nabla_V)$$

をみたすものが存在するならば、

$$((E, \nabla_E), (F, \nabla_F), \omega) \sim 0$$

と定義します。また与えられた三つ組み  $\mathcal{E} = ((E, \nabla_E), (F, \nabla_F), \omega)$  に対して、 $-\mathcal{E}$  を

$$-\mathcal{E} = ((F, \nabla_F), (E, \nabla_E), -\omega)$$

により定義します。そこで、一般の三つ組みに対する同値関係  $\sim$  を

$$\mathcal{E} \sim \mathcal{E}' \Leftrightarrow \mathcal{E} - \mathcal{E}' \sim 0$$

によって定義し、それらの属する同値類を  $[\mathcal{E}]$  で表すことにします。容易にわかるように

$$[(E, \nabla_E), (E, \nabla_E), 0] = 0, \quad -[\mathcal{E}] = [-\mathcal{E}]$$

となります。このとき次が成り立ちます (証明は [16] を参照のこと)。

**定理 1.** 三つ組み  $[(E, \nabla_E), (F, \nabla_F), \omega]$  の同値類は可換群をなし  $K^1(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$  に自然に同型となる。

これらの幾何学的な言葉づかいの下では、完全系列

$$\cdots \rightarrow K^1(X) \xrightarrow{ch} H^{\text{odd}}(X)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{p} K^1(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \xrightarrow{\beta} K^0(X) \xrightarrow{ch} H^{\text{even}}(X)_{\mathbb{C}} \rightarrow \cdots$$

における各写像は次のようにして与えられます:

$$p(\varphi) = [(0, 0), (0, 0), \varphi] \quad (\varphi \in \Omega^{\text{odd}}(X, \mathbb{C}), d\varphi = 0)$$

$$\beta[(E, \nabla_E), (F, \nabla_F), \omega] = [E] - [F].$$

ここで,  $[E]$  と  $[F]$  はそれぞれ  $K^0(X)$  におけるベクトル束  $E, F$  の属する同値類を表しています. この系列が完全であることは容易に示すことができます ([16] 第 7 章).

さて, ここで準同型写像  $e : \text{Rep}(\pi_1 X, GL(\mathbb{C})) \rightarrow K^1(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$  を定義します. 与えられた基本群の表現  $\alpha : \pi_1 X \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  に対して

$$e(\alpha) = [(V_\alpha, \nabla_\alpha), (n, d), 0]$$

とします. ここで  $V_\alpha$  は  $\alpha$  によって決まる平坦ベクトル束,  $\nabla_\alpha$  は  $V_\alpha$  上の平坦接続,  $n$  は次元が  $n = \dim \alpha$  の自明なベクトル束で,  $d$  はこの自明なベクトル束上の積接続を表します. この準同型写像は明らかに, 滑らかな多様体および滑らかな写像について自然なものになります.  $CW$  複体をホモトピー同値な多様体に置き換えること, および任意の連続写像を滑らかな写像で近似する標準的な議論を用いることにより, この写像  $e$  を有限  $CW$  複体と連続写像の圏上定義された関手の自然変換に拡張することができます.

ここで自然な準同型

$$\text{Rep}(\pi_1 X, GL(\mathbb{C})) \rightarrow K_{\text{alg}}^0(X, \mathbb{C})$$

の普遍性を関手

$$e : \text{Rep}(\pi_1 X, GL(\mathbb{C})) \rightarrow K^1(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$$

の自然変換に適用すると, 必要であった拡張

$$e : K_{\text{alg}}^0(X, \mathbb{C}) \rightarrow K^1(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}$$

(本来ならば,  $\tilde{e}$  と書くべきもの) が得られることになります. 特に  $X = S^m$  の場合には

$$K^1(S^m)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} = \begin{cases} \mathbb{C}/\mathbb{Z} & (m : \text{odd}) \\ 0 & (m : \text{even}) \end{cases}$$



となるので、本節の目的であった secondary Chern character

$$e : K_{2n+1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

が得られたことになります。

さて、ここで  $e$  についての重要な性質を一つだけあげておきます。まず、Suslin [23] から、

$$K_{2n+1}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus F$$

(ただし  $F$  は uniquely divisible group) となることが知られています (特に、 $e : K_1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  は同型となります)。このとき、secondary Chern character  $e$  は  $K_{2n+1}(\mathbb{C})$  の捩じれ部分群と  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  の間の同型を定めることが知られています。この性質は、ザイフェルトホモロジー 3 球面から定まる  $K_3(\mathbb{C})$  の元の性質を調べる際 (後述) に有用となります。

ところで、secondary Chern character とスペクトル不変量の関連についてですが、Atiyah-Patodi-Singer [5] の定理 5.3 を我々のここでの設定の下で述べると次の主張が得られます。まず、 $X$  上の自己共役な楕円型微分作用素  $A$  はある類

$$[A] \in K_1(X)$$

を定めます。また、明らかなペアリング

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : K_1(X) \times K^1(X)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

が存在します。このとき次が成り立ちます。

**定理 2.**  $\langle [A], e(\alpha) \rangle = \rho(\alpha, A)$ .

右辺は次節で定義される  $\rho$ -不変量と呼ばれるスペクトル不変量を表します。

### 3. $\rho$ -不変量

ホモロジー  $(2n+1)$ -球面  $\Sigma$  の基本群の表現  $\alpha : \pi_1 \Sigma \rightarrow GL_N(\mathbb{C})$  が与えられていました。このとき表現  $\alpha$  は  $\Sigma$  上の平坦ベクトル束  $V_\alpha$  を定めることとなります。  $H^1(\Sigma, \mathbb{Z}/2) = 0$  より  $\Sigma$  はスピン構造をただ一つもつので、 $\Sigma$  上の計量を選ぶことにより、Dirac 作用素

$$D : C^\infty(S) \rightarrow C^\infty(S)$$

が得られます. ここで,  $C^\infty(S)$  は  $\Sigma$  上のスピノ束  $S$  の  $C^\infty$  切断の空間を表します.

次に  $V_\alpha$  上の標準的な平坦接続を用いて Dirac 作用素  $D$  を平坦束  $V_\alpha$  に couple させることにより, twisted Dirac 作用素

$$D_\alpha : C^\infty(S \otimes V_\alpha) \rightarrow C^\infty(S \otimes V_\alpha)$$

が得られることになります.  $\Sigma$  が奇数次元であることから  $D$  は自己共役となりますが,  $\alpha$  がユニタリー表現でなければ, 一般には  $D_\alpha$  は自己共役作用素とは限りません. それにもかかわらず,  $D_\alpha$  は自己共役な表象をもち,  $\eta$ -関数  $\eta(s; D_\alpha)$  を定義するのに十分な  $D_\alpha$  の固有値のコントロールが得られます. 実際, これは複素変数  $s$  の有理型関数となります. Atiyah-Patodi-Singer [4] に従うと, この  $\eta$ -関数から位相不変量

$$\rho(\alpha, D) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

を抽出する方法が存在します. もちろんこの不変量  $\rho(\alpha, D)$  は, 奇数次元の任意のコンパクトスピノ多様体  $X$  および任意の表現  $\alpha : \pi_1 X \rightarrow GL_N(\mathbb{C})$  に対して定義されます.

より一般には, 不変量  $\rho(\alpha, D)$  は以下のようにして定義されます. 詳しくは原論文 [3],[4],[5] を参照して下さい.

閉リーマン多様体  $X$  上の  $C^\infty$  ベクトル束  $E$  の切断に作用する楕円型微分作用素

$$A : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(E)$$

を考えることにします. ここで  $E$  は計量をもつとし,  $A$  の表象は自己共役と仮定します (つまり,  $A$  は自己共役作用素のコンパクトな摂動となります). このとき作用素  $A$  の  $\eta$ -級数は  $s \in \mathbb{C}$  に対して

$$\eta(s; A) = \sum_{\Re(\lambda) > 0} \lambda^{-s} - \sum_{\Re(\lambda) < 0} (-\lambda)^{-s}$$

により定義されます. ここで右辺の和は  $A$  の固有値を渡ることになります. また  $\lambda^{-s}$  は分枝

$$|\lambda|^{-s} \exp(\sqrt{-1}s \arg(\lambda)) \quad \left( -\frac{3}{2}\pi < \arg < \frac{1}{2}\pi \right)$$

を表すことにします. したがって特に,  $(-1)^s = \exp(-\sqrt{-1}\pi s)$  となります.

$A$  が自己共役作用素の場合には, この  $\eta$ -級数の詳細な解析的性質は [3],[4] および [13] において議論されています. また,  $A$  が自己共役表象をもつ場合への拡張は, Seeley の結果を用いることにより可能となります. さらに, Seeley の評価は複素平面上の原点を通るある固定された直線上に固有値をもたない任意の擬微分作用素についても適用されます (Seeley の論文 [21] ではこれを ray of minimal growth と呼んでいます). 特に  $A$  が自己共役表象をもつならばこの ray を虚軸にとることができ, Seeley の評価を用いることができます. この  $\eta$ -級数は  $\Re(s)$  が十分大きいとき収束し,  $A$  の  $\eta$ -関数は解析接続により複素平面全体で定義されます. したがって,  $\eta(s; A)$  は複素変数  $s$  の有理型関数となります.

さて  $A$  の虚数の固有値を考慮した  $\eta$ -関数の精密化があります. もし  $A$  が自己共役ならば  $h$  を  $A$  の null space の次元として定義し,  $A$  が自己共役な表象をもつ一般の場合には  $A$  は有限個の虚数の固有値をもつので,  $h$  を次のようにして定義します. 任意の固有値  $\lambda$  に対して  $\lambda$  の一般化された固有空間とは, 十分大きな  $L$  に対して  $\text{Ker}(A - \lambda)^L$  のことを意味することにします. このとき整数  $h$  は虚数固有値に対する一般化された固有空間の次元の和として定義されます. そこで関数  $\xi(s; A)$  を次式で定義します:

$$\xi(s; A) = \frac{h + \eta(s; A)}{2}.$$

ここで先に見たように, 表現  $\alpha: \pi_1 \Sigma \rightarrow GL_N(\mathbb{C})$  が与えられていて, 次の作用素が定まっている状況を考えることにします:

$$A_\alpha: C^\infty(E \otimes V_\alpha) \rightarrow C^\infty(E \otimes V_\alpha).$$

この作用素は依然として自己共役表象をもち, かつ前述の構成を行うことができ, つぎの関数が得られます.

$$\begin{aligned} \xi(s; \alpha, A) &= \xi(s; A_\alpha) \\ \tilde{\xi}(s; \alpha, A) &= \xi(s; \alpha, A) - N\xi(s; A). \end{aligned}$$

ここで, Atiyah-Patodi-Singer [5] と同様に  $\tilde{\xi}$  は  $s = 0$  で有限となり, さらに mod  $\mathbb{Z}$  すると  $\tilde{\xi}(\alpha, A) = \tilde{\xi}(0; \alpha, A) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  は  $A$  のホモトピー不変量となります. [4] に従い,

$$\rho(\alpha, A) = \tilde{\xi}(0; \alpha, A) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

と定義します. このとき Jones-Westbury の主結果は次のとおりです.

定理 3.  $e[\Sigma, \alpha] = \rho(\alpha, D) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

ホモロジー  $(2n+1)$ -球面  $\Sigma$  に対しては,

$$K_1(\Sigma) = K^1(\Sigma) = \mathbb{Z}, \quad K^1(\Sigma)_{\mathbb{C}/\mathbb{Z}} = K^1(\Sigma) \otimes \mathbb{C}/\mathbb{Z} = \mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

となることがわかります. さらに, Dirac 作用素  $D$  から定まる類  $[D] \in K_1(\Sigma)$  が生成元を与えていることから, 上記定理は前節の定理 2 から直ちに従います.

ところで, Chern-Simons 類を用いることによって  $\rho(\alpha, A)$  を計算するコホモロジカルな方法も知られています. 結果のみ述べると次のようになります.

表現  $\alpha: \pi_1 X \rightarrow GL_N(\mathbb{C})$  は同伴する平坦主束  $Q_\alpha$  が位相的に自明となるようなものとし,  $s$  を  $Q_\alpha$  の  $C^\infty$ -切断とします.  $A$  を  $X$  上の自己共役楕円型作用素とするとき

$$\rho(\alpha, A) = \langle Tch(\alpha, s), ch(A) \rangle \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

が成り立ちます. ただし  $Tch(\alpha, s)$  は Chern 指標に同伴した Chern-Simons 形式で,  $k$  次の項  $Tch_k(\alpha) \in \Omega^{2k-1}(Q_\alpha, \mathbb{C})$  は

$$Tch_k(\alpha) = (-1)^{k-1} \left( \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \right)^k \frac{(k-1)!}{(2k-1)!} \text{tr}(\theta^{2k-1})$$

で与えられます ( $\theta$  は平坦接続). また  $ch(A)$  は  $K$ -ホモロジーにおける Chern 指標  $ch: K_1(X) \rightarrow H_{\text{odd}}(X, \mathbb{C})$  を表します.

$s$  を  $Q_\alpha$  の他の切断とすると, その差

$$\langle Tch(Q_\alpha, s), ch(A) \rangle - \langle Tch(Q_\alpha, s'), ch(A) \rangle \in \mathbb{C}$$

は  $X \times S^1$  上のある楕円型作用素の指数を表すことから, 整数値になることがわかります. よって前述の  $\rho(\alpha, A)$  の式の右辺は,  $\text{mod } \mathbb{Z}$  で切断  $s$  の選び方に依らないことを注意しておきます.

#### 4. 例 (双曲的 3 次元多様体の場合)

ホモロジー球面とは限らないコンパクト双曲的 3 次元多様体  $X$  (定曲率  $-1$  をもつ) に対しては, 不変量  $\rho$  をさらに書き下すことができます.  $X$  の普遍被覆は 3 次元双曲空間  $\mathbb{H}^3$  であり, 基本群  $\pi_1 X$  は  $\mathbb{H}^3$  上に等長的に作用していま

した.  $\mathbb{H}^3$  の等長変換群は  $PSL_2(\mathbb{C})$  なので, この作用は表現  $\pi_1 X \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$  を定めることになります. さて,  $X$  上のスピン構造とこの表現の  $SL_2(\mathbb{C})$  へのリフトの間には 1 対 1 の対応があるので, 表現  $\alpha: \pi_1 X \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$  に対応する  $X$  上のスピン構造を選ぶことにします. このスピン構造により定まる  $X$  上の Dirac 作用素を  $D$  とするとき

$$\text{定理 4. } \rho(\alpha, D) = \frac{1}{2}CS(X) - \frac{\sqrt{-1}}{4\pi^2}\text{Vol}(X) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}.$$

ただし,  $\text{Vol}(X)$  は  $X$  の双曲体積を表します. また  $CS(X)$  は  $X$  の Chern-Simons 不変量で, 次のように定義されます.  $F \rightarrow X$  を  $X$  の有向直交枠束 (つまり主  $\mathfrak{so}(3)$  束) とします.  $\gamma \in \Omega^1(F, \mathfrak{so}(3))$  を  $F$  のリーマン接続の接続型式とします. このとき Chern-Simons 型式と呼ばれる 3 型式  $\varphi(\gamma) \in \Omega^3(F)$  が構成されます. 実際, 第一 Pontrjagin 型式  $p_1$  に対して,

$$\varphi(\gamma) = Tp_1(\gamma)/2$$

となります [10].  $X$  は向きづけられた 3 次元多様体なので, 主束  $F$  は切断  $\sigma$  をもち, このとき Chern-Simons 不変量は

$$CS(X) = \int_X \sigma^* \varphi(\gamma) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

により定義されます.  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  で値を取ることににより, この定義は  $\sigma$  の選び方に依らないことがわかります.

この定理は, 前節の最後に述べた  $\rho$ -不変量のコホモロジカルな解釈および Yoshida の結果 [25] を用いた具体的な計算により示されます.

さて, 前述の定理 3 と定理 4 を組み合わせると, 双曲的なホモロジー 3 球面が  $K_3(\mathbb{C})$  の無限位数の元を定めることがわかります. また逆に, 双曲的 3 次元多様体の体積および Chern-Simons 不変量は, 位相不変量  $[X, \alpha] \in K_{\text{alg}}^0(X, \mathbb{C})$  により決まることがわかります. さらに代数的  $K$  理論において,  $\mathbb{C}$  の  $K$  理論のどのくらいが secondary Chern character  $e$  で detect できるかを決定する試みがあります. 上記二つの定理の視点から, この問いは双曲的 3 次元多様体の体積と Chern-Simons 不変量の値の決定に関係することになり, トポロジーの観点からも興味深い問題となります.

### 5. 例 (ザイフェルトホモロジー 3 球面の場合)

次に, ザイフェルトホモロジー 3 球面から決まる  $K$  群の元に対する不変量  $e$  についての結果を解説します.

$(a_1, \dots, a_n)$  を対ごとに互いに素な  $n$  個の整数の組とし,  $\Sigma(a_1, \dots, a_n)$  によりザイフェルトホモロジー 3 球面を表すことにします. つまり, 固定部分群が  $\mathbb{Z}/a_1, \dots, \mathbb{Z}/a_n$  となる  $n$  個の例外の軌道を除き, 自由な  $S^1$  作用を許容する 3 次元多様体のことです. このとき  $G = \pi_1 \Sigma(a_1, \dots, a_n)$  は次の表示をもちます:

$$\langle h, x_1, \dots, x_n \mid [x_i, h] = 1, x_1^{a_1} = h^{-b_1}, \dots, x_n^{a_n} = h^{-b_n}, x_1 \cdots x_n = h^{-b_0} \rangle.$$

ただし,  $b_i$  は  $\text{mod } a_i$  で唯一に定まり

$$a_1 \cdots a_n \left( -b_0 + \frac{b_1}{a_1} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} \right) = 1$$

をみたくします (これはザイフェルト多様体がホモロジー球面となる条件を表します).  $G$  が完全群 ( $G = [G, G]$  をみたす) であることから, 任意の複素表現  $\alpha : G \rightarrow GL_N(\mathbb{C})$  の像は  $SL_N(\mathbb{C})$  に含まれることに注意します. 以下では, 基本群  $G$  の既約表現のみ考えることにします. このとき Schur の補題から,  $h$  はスカラー倍で作用することがわかります. そこで

$$\alpha(h) = \lambda_h I \quad (\lambda_h \in \mathbb{C})$$

とおくことにします.  $\alpha(h) \in SL_N(\mathbb{C})$  であることから, 1 の原始  $N$  乗根  $\zeta_N$  に対して

$$\lambda_h = \zeta_N^{\tau_h}$$

となります. ここで行列  $\alpha(x_j)$  ( $1 \leq j \leq n$ ) を考えると,  $G$  における関係子  $x_j^{a_j} = h^{-b_j}$  から,  $\alpha(x_j)$  の固有値  $\lambda_1(j), \dots, \lambda_N(j)$  は

$$\lambda_k(j)^{a_j} = \lambda_h^{-b_j} \quad (1 \leq k \leq N)$$

をみたすことがわかります. これを  $\lambda_k(j)$  のみたす方程式とみると,  $a_j$  個の根が存在するので, 数  $s_k(j)$  ( $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq N$ ) を次式で定義することにします:

$$\lambda_k(j) = \zeta_{Na_j}^{Ns_k(j) - b_j \tau_h}.$$

この数  $s_k(j)$  たちを表現  $\alpha$  の「型」と呼ぶことにします.

定理 5. 上記設定の下

$$2N\Re(e[\Sigma(a_1, \dots, a_n), \alpha]) = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{a_1 \cdots a_n}{2a_j^2} (s_k(j) - s_l(j))^2.$$

虚部に対する一般的な公式は現在のところ得られていませんが、 $\alpha$  がユニタリー表現もしくはその複素共役表現  $\bar{\alpha}$  に同型の場合には

$$\Im(e[\Sigma(a_1, \dots, a_n), \alpha]) = 0$$

となることがわかります. これを用いると多くの場合に  $\Im \circ e = 0$  が示せることになります.

最後に、 $K$  群のどの元がザイフェルトホモロジー 3 球面を用いて構成されるかという問いを考えることにします. 上記定理の視点から、この問いは指定された「型」をもつ表現を見つけることに帰着されることになります.  $\pi_1 \Sigma(a_1, \dots, a_n)$  の表現についてすべてわかっている訳ではありませんが、次の結果を示すのに十分な表現を見つけることができます.

定理 6.  $K_3(\mathbb{C})$  の任意の有限位数の元は、ある表現  $\alpha: \pi_1 \Sigma(p, q, r) \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$  に対して  $[\Sigma(p, q, r), \alpha]$  の形で表される.

この定理は、基本群の  $SL_2(\mathbb{C})$  表現空間のパラメトリゼーション (これはよく知られている)

$$\begin{aligned} & \text{Hom}(\pi_1 \Sigma(p, q, r), SL_2(\mathbb{C})) / \sim \\ & \cong \{(k, l, m) \mid 0 < k < p, 0 < l < q, 0 < m < r, k = l = m \pmod{2}\} \end{aligned}$$

および定理 5 を用いて、 $e[\Sigma(p, q, r), \alpha]$  を具体的に計算することにより示されます. 実際この場合、表現  $\alpha$  とその複素共役表現  $\bar{\alpha}$  が同型となり (従って、 $\Im \circ e = 0$  となるので)、secondary Chern character  $e$  は

$$\begin{aligned} 4e[\Sigma(p, q, r), \alpha] &= 4\Re(e[\Sigma(p, q, r), \alpha]) \\ &= - \left( \frac{qrk^2}{p} + \frac{prl^2}{q} + \frac{pqm^2}{r} \right) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z} \end{aligned}$$

で与えられることになります. ここで特に、 $k = l = m = 1$  と選べば、 $4pqr$  と素な整数  $\delta$  を用いて

$$e[\Sigma(p, q, r), \alpha] = \frac{\delta}{4pqr}$$

となります。

$\mathbb{Z}[\zeta_d]$  で円分体  $\mathbb{Q}(\zeta_d)$  の整数環を表すことにします。Borel [8], Merkurjev-Suslin [19], Levine [18] の結果を組み合わせると,

$$K_3(\mathbb{Z}[\zeta_d]) = \mathbb{Z}/w_2(d) \oplus \mathbb{Z}^{r_2}$$

であることがわかります。ここで  $w_2(d) = \text{lcm}(24, 2d)$  であり,  $r_2$  は  $\mathbb{Q}(\zeta_d)$  の  $\mathbb{C}$  への complex embedding の数を表します。特に  $(6, d) = 1$  のとき,  $K_3(\mathbb{Z}[\zeta_d])$  の捩じれ部分群はちょうど  $\mathbb{Z}/24d$  であることに注意します。

**定理 7.** もし  $(6, d) = 1$  ならば,  $[\Sigma(2, 3, d), \alpha] \in K_3(\mathbb{Z}[\zeta_d])$  が捩じれ部分群  $\mathbb{Z}/24d$  の生成元となるような表現  $\alpha: \pi_1 \Sigma(2, 3, d) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}[\zeta_d])$  が存在する。

具体例として Poincaré 3 球面  $P = \Sigma(2, 3, 5)$  を考えることにします。このとき

$$\pi_1 P = \langle a, b \mid (ab)^2 = a^3 = b^5 = 1 \rangle$$

は 20 面体群とよばれる位数 120 の完全群であることが知られています。これは  $SU(2)$  の部分群であり, かつこの部分群に対応する行列は係数がすべて  $\mathbb{Z}[\zeta_5]$  に入るように選ぶことができるので, 表現  $\alpha: \pi_1 P \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}[\zeta_5])$  が得られることになります。定理 5 を用いた直接計算 (前述の計算結果も参照のこと) により,

$$e[P, \alpha] = \frac{1}{120}$$

が得られます。このことから, (ある意味で) 最も明白な  $\pi_1 P$  の表現により定義された  $K_3(\mathbb{Z}[\zeta_5])$  における類は, その捩じれ部分群の生成元を与えていることになります。

## 6. 補遺 (Quillen のプラス構成について)

$X$  を弧状連結な位相空間で,  $\pi_1 X$  が有限生成かつ任意の元が交換子の積で表せるとする。このとき Hurewicz の定理から,  $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$  となる。次に,  $\pi_1 X$  の生成元を消すように有限個の 2-cell  $e_1^2, \dots, e_n^2$  を  $X$  に張り合わせる。よって

$$Y = X \cup \left( \bigcup_i e_i^2 \right)$$

は単連結となる。ここで, 空間対  $(Y, X)$  のホモロジー完全列から, 相対類  $[e_1^2], \dots, [e_n^2]$  に射影するようなホモロジー類  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in H_2(Y)$  が存在する。



$Y$  が単連結より, 再び Hurewicz の定理から

$$\pi_2(Y) \rightarrow H_2(Y)$$

は同型写像となる. このとき各  $\alpha_i$  は連続写像  $a_i: S^2 \rightarrow Y$  で表される. これらの写像によって 3-cell を張り合わせることににより, 位相空間

$$X^+ = Y \cup \left( \bigcup_j e_j^3 \right) = X \cup \left( \bigcup_i e_i^2 \right) \cup \left( \bigcup_j e_j^3 \right)$$

を得る. これを  $X$  についての Quillen プラス構成といい, 次の性質を満たす:

- (i)  $X^+$  は単連結.
- (ii) 包含写像  $X \rightarrow X^+$  はホモロジーの同型を誘導する.

より一般には,  $\pi_1 X$  の完全正規部分群を  $\Gamma$  (つまり  $\Gamma = [\Gamma, \Gamma]$  をみtas) とするとき,  $X$  に適当な 2-cell および 3-cell を接着させて, 以下をみたす位相空間  $X^+$  と連続写像  $f: X \rightarrow X^+$  が構成できる:

- (i)  $\pi_1 f: \pi_1 X \rightarrow \pi_1 X^+$  は全射.
- (ii)  $\text{Ker } \pi_1 f = \Gamma$ .
- (iii)  $X^+$  上の任意の局所係数  $L$  に対して  $f_*: H_*(X, f^*L) \rightarrow H_*(X^+, L)$  は同型.

Quillen はこの構成を  $GL(R) = \varinjlim GL_N(R)$  の分類空間  $X = BGL(R)$  および  $\Gamma = \varinjlim E_N(R)$  (ただし  $E_N(R) = \{I + rE_{ij} \in GL_N(R) \mid i \neq j, r \in R\}$  で,  $E_{ij}$  は行列単位) に適用して, 環  $R$  の代数的  $K$  群を

$$K_n(R) = \pi_n BGL^+(R) \quad (n \geq 1)$$

により定義した.

## References

- [1] J.F. Adams, *On the group  $J(X)$ -IV*, *Topology* **5** (1966), 21–71.
- [2] M.F. Atiyah and F. Hirzebruch, *Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **65** (1959), 276–281.
- [3] M.F. Atiyah, V.K. Patodi and I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **77** (1975), 43–69.
- [4] M.F. Atiyah, V.K. Patodi and I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry II*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **78** (1975), 405–432.
- [5] M.F. Atiyah, V.K. Patodi and I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry III*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **79** (1976), 71–99.
- [6] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators III*, *Ann. Math.* **87** (1968), 546–604.
- [7] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *Index theory for skew-adjoint Fredholm operators*, *Publ. Math. IHES* **37** (1969), 305–326.
- [8] A. Borel, *Stable real cohomology of arithmetic groups*, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* **7** (1974), 235–272.
- [9] A. Borel and N. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representation of reductive groups*, *Ann. Math. Studies*, Vol. 94, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.
- [10] S.S. Chern and J. Simons, *Characteristic forms and geometric invariants*, *Ann. Math.* **99** (1974), 48–69.
- [11] A. Connes and M. Karoubi, *Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm, K-theory* **2** (1988), 431–463.
- [12] R. Fintushel and R.J. Stern, *Instanton homology of Seifert fibred homology three spheres*, *Proc. London Math. Soc.* **61** (1990), 109–137.
- [13] P. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, *Mathematics Lecture Series*, Vol. 11, Publish or Perish, Wilmington, DE, 1984.
- [14] J. Hempel, *3-manifolds*, *Ann. Math. Studies*, Vol. 86, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976.
- [15] J.D.S. Jones and B.W. Westbury, *Algebraic K-theory, homology spheres, and the  $\eta$ -invariant*, *Topology* **34** (1995), 929–957.
- [16] M. Karoubi, *Homologie cyclique et K-théorie*, *Astérisque* **149** (1987).

- [17] M. Karoubi, *Théorie générale des classes caractéristiques secondaires*, *K-theory* **4** (1990), 55–87.
- [18] M. Levine, *The indecomposable  $K_3$  of fields*, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* **22** (1989), 255–344.
- [19] A.S. Merkurjev and A.A. Suslin, *On the  $K_3$  of a field*, LOMI preprint M-2-07 (1987).
- [20] D. Quillen, *Characteristic classes of representations*, in *Algebraic K-theory*, Evanston 1976, *Lecture Notes in Math.* Vol. 551, Springer, Berlin (1976), 189–216.
- [21] R.T. Seeley, *Complex powers of an elliptic operator*, *Singular Integrals* (Proc. Sympos. Pure Math. Chicago III, 1966), Amer. Math. Soc. Providence, RI (1967), 288–307.
- [22] R.E. Stong, *Notes on cobordism theory* (Princeton Univ. Press 1968).
- [23] A.A. Suslin, *On the K-theory of local fields*, *J. Pure Appl. Algebra* **34** (1984), 301–318.
- [24] A.A. Suslin, *Algebraic K-theory of fields*, *Proc. Internat. Congress of Mathematicians*, 1986, Berkeley, CA, Amer. Math. Soc. (1987), 222–244.
- [25] T. Yoshida, *The  $\eta$ -invariant of hyperbolic 3-manifolds*, *Invent. Math.* **81** (1985), 473–514.

(2002 年 7 月 6 日記)

もりふじ たかゆき

〒184-8588 東京都小金井市中町 2-24-16

東京農工大学数学教室

morifuji@cc.tuat.ac.jp